R. Müller

Schaltalgebra
- was nicht im Lehrbuch steht

Im folgenden wollen wir uns mit folgenden Fragen auseinandersetzen:

1) Stellung und Stellenwert von Schaltalgebra im neuen Lehrplan.
2) Warum gerade die Schaltalgebra dazu zwingt, die zweiwertige Logik zu hinterfragen.
3) Wie man aus Seilzügen u.ä. "Computer" bauen kann.
4) Wie man Schaltungen "in der Praxis" entwirft und (algorithmisch) vereinfacht.

Auf den ersten Blick scheint es sich bei den aufgelisteten Themen um einen "bunten Strauß netter Ergänzungen" zu einem Lehrbuch zu handeln - wie es ja auch im Titel des Vortrags steht. Das ist wahr, aber nicht die volle Wahrheit. Es geht auch darum, grundlegende Positionen und didaktische Überlegungen, wie sie bei der Konzeption des Unterrichtes getätigt werden müssen, unter Bezugnahme auf ein konkretes Lehrbuch (Reichel-Müller-Laub: Lehrbuch der Mathematik 5) und den neuen Lehrplan anzuregen.

1) Stellung und Stellenwert von Schaltalgebra im neuen Lehrplan

Was genau steht unter dem Titel "Schaltalgebra" im Lehrplan für AHS ?[1]

Zunächst sieht man, daß die entsprechenden Passagen in den Abschnitt "Logische Begriffe und Mengen" eingebunden sind, dessen Zielsetzungen in der Präambel wie folgt niedergelegt sind.

> Ziel ist ein Reflektieren über logische Begriffe und logische Beziehungen, die in verschiedenen mathematischen Zusammenhängen und auch in umgangssprachlichen Formulierungen auftreten. Dabei sollen die Schüler die in der Mathematik üblichen Regeln für den Gebrauch dieser Begriffe und Beziehungen in Abhebung vom Gebrauch in der Umgangssprache kennenlernen und diese Begriffe und Beziehungen in verschiedenen mathematischen Bereichen anwenden. Schaltungen können als Realisierungen logischer Verknüpfungen angesehen werden und bilden ein wesentliches Element elektronischer Rechengeräte.

An die Präambel schließen die folgenden Konkretisierungen an:

> Darstellen und Beschreiben von Schaltungen:
>
> Kennen von Grundschaltungen (Gatter); Darstellen von Schaltungen durch Schaltpläne, Schalttabellen und Schaltfunktionen (Schaltterme). Vergleichen von Schaltungen (Äquivalenz). Entwerfen von Schaltungen. (→ Grundlegende Kenntnisse, Darstellen und Interpretieren)
>
> Rechengesetze für Schaltterme:
>
> Erkennen und Formulieren von Rechengesetzen für das Umformen von Schalttermen. Einsicht gewinnen sowohl in die Gleichartigkeit dieser Rechengesetze mit denen der Mengenalgebra und der Aussagenlogik, als auch in die Unterschiede zu den Rechengesetzen für reelle Zahlen.
>
> Allenfalls: Exemplarisches Verwenden dieser Rechengesetze (Axiome) zum Vereinfachen von Schalttermen und zum Beweisen einfacher Sätze. Kennen der algebraischen Struktur "BOOLEsche Algebra". (→ Vertiefte mathematische Kenntnisse, Produktives Arbeiten)

[1] Vgl. L2 !

Besonders wichtig ist m.E. die Präambel ? In ihr steht der Auftrag, die Schaltalgebra mit der Logik zu vernetzen, sie nicht als Thema zu - isolieren und an das Ende des Schuljahres bzw. des Lehrbuches zu verbannen. Es geht eben um mehr, als nur Stromlaufpläne zeichnen zu lernen. Worin dieses mehr bestehen kann (und m.E soll), will ich im folgenden erläuteren:

2) Warum gerade die Schaltalgebra dazu zwingt, die zweiwertige Logik zu hinterfragen

Vielfach begnügt man sich mit Schaltplänen der folgenden Art:

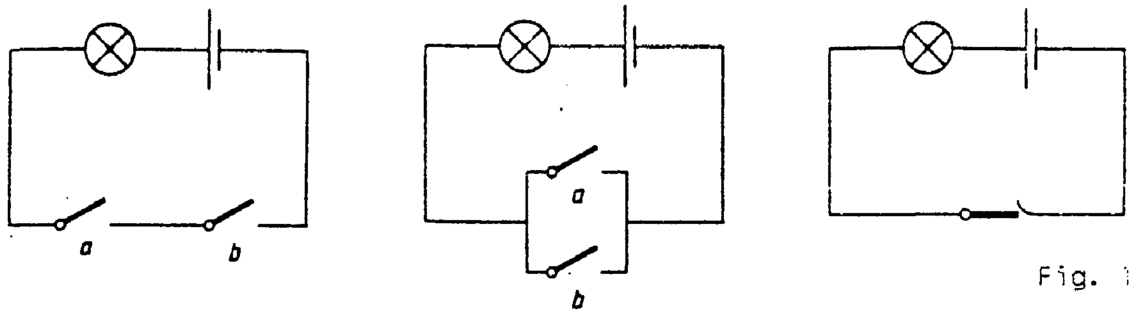


Fig. 1

Diese Darstellung hat zwei Nachteile: Erstens können Schalter immer nur in einem konkreten Schaltzustand (im allgemeinen dem Wert logisch Ø entsprechend) gezeigt werden, zweitens können so dargestellte Schaltelemente tatsächlich nur 2 Werte annehmen, und geben so keinerlei Motiv, über die Zweiwertigkeit der Logik zu refelektieren.

Bei Gatterdarstellungen liegen die Dinge anders. Dort kann man das - didaktisch so wertvolle - Prinzip der "black box" nutzen. Wir wissen, welcher input zu welchem output führt bzw. führen soll, wir wissen aber nicht, wie wir das bewerkstelligen sollen. Die Untersuchung verschiedener technischer Realisationsmöglichkeiten bietet dann in sehr naheliegender Weise Gelegenheit, die Zweiwertigkeit der Logik zu reflektieren.

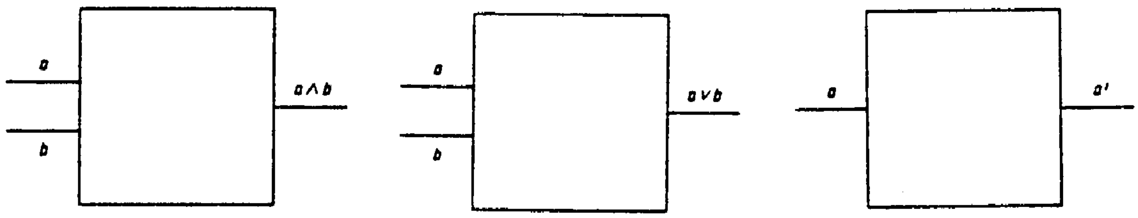


Fig. 2

Füllen wir die black boxes zunächst mit Relaistechnik. Dieser Weg führt unmittelbar zur Serien-, Parallel- und Negationsschaltung, hat aber gegenüber den reinen Stromlaufplänen den Vorteil, anhand der Steuerstromkreise den Steuer- und Regelungsaspekt thematisieren zu können, was ja letztlich sehr viel mit "Logik" zu tun hat.

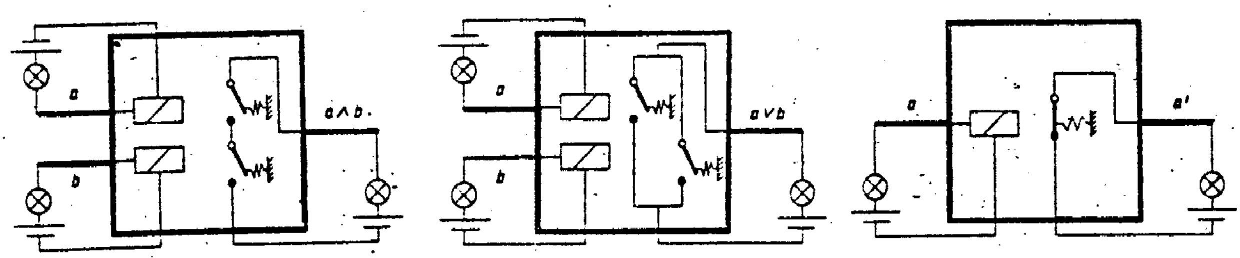


Fig. 3

Die Hinzunahme von Steuerstromkreisen ist grundlegend für ein Verständnis der Realisationen mittels der Transistortechnik (bzw. der überholten Röhrentechnik). Diese Realisation führt zwangsläufig zur Dichotomie - "Analog-Digital" (bzw. "Kontinuierlich-Disket"). Der Schüler kann (muß) erkennen, daß die diskreten Werte 1 (wahr) und Ø (falsch) "Idealisierungen" sind, hinter denen z.B. die Spannungsintervalle [3,8; 5]≙1 und [Ø; Ø,8]≙Ø stehen. Für Werte zwischen diesen beiden Intervallen ist das Verhalten des Transistors unbestimmt. Daraus folgt aber, daß man eigentlich einen dritten Wert zu berücksichtigen hat. Damit wird aber aus der zweiwertigen Logik eine dreiwertige Logik (mit unübersehbaren Parallelen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff):

s (Transistor schaltet <u>s</u>icher)
m (Transistor schaltet <u>m</u>öglicherweise)
u (Transistor schaltet <u>u</u>nmöglich)

Die Schalttafel für die Und·Verknüpfung lautet dann z.B. so:

a	b	a∧b
s	s	s
s	m	m
s	u	u
m	s	m
m	m	m
m	u	u
u	s	u
u	m	u
u	u	u

Nun ist man im allgemeinen an einem unbestimmten Schaltverhalten nicht interessiert. In der Transistortechnik versucht man die Kennlinie (Hystereseschleife) (Fig. 4) des Transistors daher so zu gestalten, daß der Unbestimmtheitsbereich klein ist, und die Taktzeit so "lang" festzulegen, daß der Übergang von 1 nach Ø und umgekehrt sicher funktioniert. Mit anderen Worten: Man schließt mit technischen Mitteln den Wert "unbestimmt" aus und arbeitet mit einer "bloß" zweiwertigen Logik.

Das muß aber nicht sein. Die neuen "optischen Transistoren" verfügen typischerweise über mehrere bistabile Bereiche (Fig. 5), und könnten so die Entwicklung völlig "neuer" Computerlogiken fördern, deren mathematische Grundlagen unter dem Begriff "mehrwertige Logik" schon seit langem untersucht werden. Die Schüler können an dieser Stelle (wiederum) erkennen, daß Mathematik kein bloßer "intellektueller Zeitvertreib" ist.

3) Wie man aus Seilzügen u.ä. Computer bauen kann

Die obigen Realisationen der Grundgatter mittels elektronischer bzw. optischer Transistoren ("Transphasoren") läßt sich in wenigen Minuten erklären, wenn man sich nicht allzusehr in Details verliert. M.E. genügt es, das Prinzip zu verdeutlichen:

<u>Elektronischer Transistor</u>	<u>Optischer Transistor</u>
Emitter	Spiegel
Basis	Medium
Kollektor	Spiegel

Die mittlere Schicht steuert den

Stromdurchfluß	Lichtdurchfluß

großer Kollektorstrom ≙ Transistor durchgängig ≙ große Lichtintesität
kleiner Kollektorstrom ≙ Transistor sperrt ≙ geringe Lichtintensität

gemäß der Kennlinien in

Fig. 4

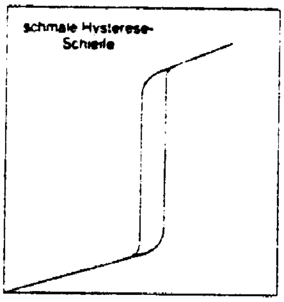
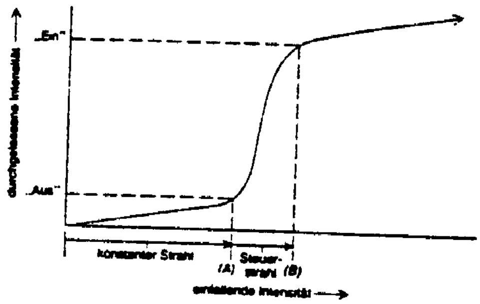


Fig. 5



Da das Funktionsprinzip eines elektronischen Transistors heutzutage Allgemeingut ist, will ich mich auf die Erklärung des optischen Transistors beschränken: Es baut auf dem FABRY·PEROT·Interferometer auf, wie es seit Ende des vorigen Jahrhunderts bekannt ist.

Zwischen zwei parallelen Spiegeln wird ein Lichtstrahl hin und her geworfen, der sich je nach Länge des Interferometers durch Interferenz zwischen dem hinlaufenden und dem zurücklaufenden Strahl abschwächt oder verstärkt. Durch Verändern des Spiegelabstandes kann man daher erreichen, daß der beim zweiten Spiegel austretende Strahl eine hohe Intensität (≙1) oder eine niedrige Intensität (≙0) besitzt; insoferne kann man das Interferometer als Schaltglied benützen.

Allerdings macht die mechanische Veränderung des Spiegelabstandes Probleme, sodaß die praktische Anwendung des Interferometers als Schaltglied erst mit der Entdeckung von Materialien mit einem von der Lichtintensität abhängigen Brechungsindex (wie z.B. Indiumantimonid·Kristallen) eingeleitet wurde. Ändert man mit Hilfe eines Steuerstrahls die Gesamtintensität des einfallenden Lichtstrahls, so ändert sich der Brechungsindex und daher die Wellenlänge. Trotz konstantem Spiegelabstand ist es daher möglich, konstruktive bzw. destruktive Interferenz zwischen dem hinlaufenden und dem rücklaufenden Strahl zu erzwingen (Fig. 6).

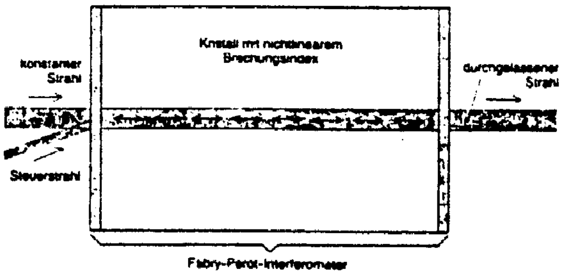


Fig. 6

Die grundlegende Problematik um die Begriffe "Analog" und "Kontinuierlich" kann man auch thematisieren, ohne auf Kenntnisse über Transistoren zurückgreifen zu müssen. Eine nette Idee hiezu ist die folgende Realisierung der Grundgatter mittels Seilzügen (L4):

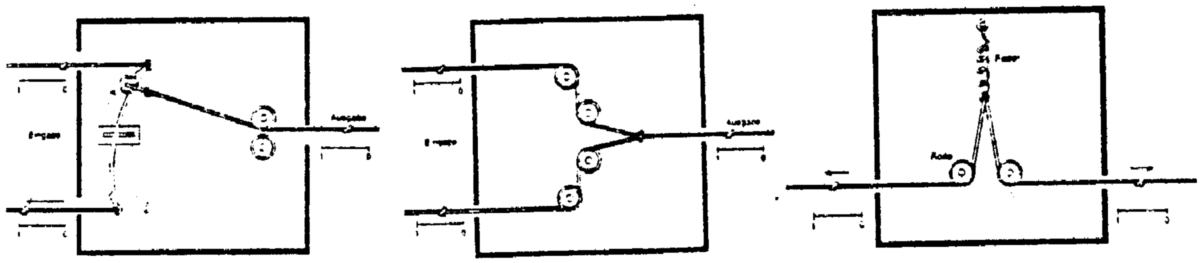


Fig. 7

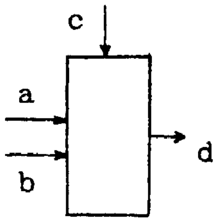
Die Werte 1 und Ø werden dabei als Knotenstellungen im Bezug auf eine Vergleichsstrecke - wie bei den obigen Spannungsintervallen zwangsläufig unscharf - codiert.

4) Wie man Schaltungen "in der Praxis" entwirft und (algorithmisch) ver einfacht

Wenden wir uns zum Schluß der Frage zu, wie man aus diesen 3 Grundbausteinen, aus denen bekanntlich jedes beliebige Schaltnetz aufgebaut werden kann, Schaltungen mit vorgegebenen Schaltverhalten - z.B. einen Multiplexer - herstellen kann. Wir wollen dazu die (in L1 S. 4Øf ausführlich erklärte) Methode der Disjunktiven Normalformen verwenden:

Ein Multiplexer ist ein Gerät, mit dem man mittels einer Steuerleitung c entscheiden kann, ob das Signal auf Leitung a oder das Signal auf Leitung b auf Leitung d weitergeleitet wird. In unserem Fall möge c=1 die Leitung a durchschalten, c=Ø die Leitung b. Dann hat man 8 Fälle zu untersuchen:

Kennziffer	a	b	c	d
Ø	1	1	1	1
1	1	1	Ø	1
2	1	Ø	1	1
3	1	Ø	Ø	Ø
4	Ø	1	1	Ø
5	Ø	1	Ø	1
6	Ø	Ø	1	Ø
7	Ø	Ø	Ø	Ø



Zur Ermittlung der Disjunktiven Normalform geht man wie folgt vor:

1. Schritt: Streiche alle Zeilen mit output 0.
2. Schritt: Ordne den verbliebenen Zeilen jenes (eindeutig bestimmte) verallgemeinerte Und-Glied zu, das den Wert 1 hat. Dazu hat man jene Schaltvariablen, die in dieser Zeile den Wert 0 haben, in negierter Form, alle anderen Schaltvariablen in unnegierter Form im Und-Glied zu berücksichtigen.
3. Schritt: Verknüpfe die im 2. Schritt erstellten Und-Glieder disjunktiv.

Für den obigen Multiplexer erhält man derart die Disjunktive Normalform

$$d=f(a,b,c)=(a\wedge b\wedge c)\vee(a\wedge b\wedge c')\vee(a\wedge b'\wedge c)\vee(a'\wedge b\wedge c')$$

und aus dieser die einfachere Darstellung $d=f(a,b,c)=(a\wedge c)\vee(b\wedge c')$

Im Lehrbuch wird gezeigt, wie man die Gesetze der Schaltalgebra einsetzen kann, um einen solchen Term zu vereinfachen. Allerdings verlangt dies viel Übung und Fingerspitzengefühl. (Man denke daran, wie lange es dauert, bis die Schüler die Zahlenalgebra beherrschen !) Man sollte sich daher mit der Demonstration der Mächtigkeit des Kalküls - wie etwa am folgenden Beispiel - und ganz einfachen Übungsaufgaben begnügen.

$$\begin{aligned}
f(a,b,c)&=(a\wedge b)\vee(a\wedge b'\wedge c) && \text{Ass.}\\
&=(a\wedge b)\vee[(a\wedge b')\wedge c)] && \text{Dist.}\\
&=[(a\wedge b)\vee(a\wedge b')]\wedge[(a\wedge b)\vee c] && \text{Dist.}\\
&=[a\wedge(b\vee b')]\wedge[(a\wedge b)\vee c] && \text{Kompl.}\\
&=[a\wedge 1]\wedge[(a\wedge b)\vee c] && \text{Neut.}\\
&=a\wedge[(a\wedge b)\vee c] && \text{Dist.}\\
&=[a\wedge(a\wedge b)]\vee(a\wedge c) && \text{Ass.}\\
&=[(a\wedge a)\wedge b]\vee(a\wedge c) && \text{Idem.}\\
&=(a\wedge b)\vee(a\wedge c) && \text{Dist.}\\
&=a\wedge(b\vee c)
\end{aligned}$$

Dieses Beispiel hätte man mittels der Konvertierungsformeln

$$x\wedge y=x\cdot y \bmod 2 \qquad x\vee y=x\cdot y+x+y \bmod 2 \qquad x'=1-x \bmod 2$$

auch auf arithmetischem Weg lösen können. Dazu setzen wir - um die beiden Modelle besser auseinanderhalten zu können - für a, b und c der Reihe nach x, y und z und erhalten $a\wedge b=(x\cdot y)$ und $a\wedge b'\wedge c=x\cdot(1-y)\cdot z$:

$$\begin{aligned}
f(a,b,c)&=[x\cdot y]\cdot[x\cdot(1-y)\cdot z]+[x\cdot y]+[x\cdot(1-y)+z] \bmod 2 && \text{Ausmultiplizieren}\\
&=x^2\cdot y\cdot z-x^2\cdot y^2\cdot z+x\cdot y+x\cdot z-x\cdot y\cdot z \quad \bmod 2 && x^2\equiv x \bmod 2\\
&=x\cdot y\cdot z-x\cdot y\cdot z+x\cdot y+x\cdot z-x\cdot y\cdot z \quad \bmod 2 && x \text{ herausheben}\\
&=x\cdot(y+z-y\cdot z) \quad \bmod 2 && -1\equiv 1 \bmod 2\\
&=x\cdot(y+z+y\cdot z) \quad \bmod 2 && \text{Rückkonvertieren}\\
&=a\wedge(b\vee c)
\end{aligned}$$

Will man seinem Unterricht (zusätzlich) einen mehr praxisorientierten touch geben, so wird man wohl auf eines der in der Praxis verwendeten Verfahren zurückgreifen müssen. Wir wollen im folgenden das von - QUINE-Mc CLUSKY verwenden. (Es ist jenes, das auf der Begleitdiskette zum Lehrbuch zur Verfügung gestellt wird.)

Dieses Verfahren macht nichts anderes, als den Term schrittweise nach den Rechengesetzen

$$(a\wedge b)\vee(a\wedge c)=a\wedge(b\vee c) \qquad \text{Dist.}$$
$$a\vee a'=1 \qquad \text{Kompl.}$$
$$a\wedge 1=a \qquad \text{Neut.}$$

zu vereinfachen. Da die Schüler diese Gesetze bereits kennen, darf man wohl bei der Anwendung des Verfahrens

VERSTÄNDIGES HANDELN und ADÄQUATE VORSTELLUNGEN

erwarten.

Wie geht man nun im einzelnen vor ?

Zunächst schreibt man die Klammerausdrücke (Minterme) der Disjunktiven Normalform untereinander. Man beginnt dabei mit dem Klammerausdruck, der die wenigsten Negationsschalter enthält, und grenzt die Felder von Mintermen, welche die gleiche Anzahl von Negationsschaltern enthalten, durch Querstriche voneinander ab.

Angewendet auf das obige Beispiel des Multiplexers erhält man auf diese Weise die ersten beiden Spalten der folgenden Tabelle:

Kennziffer	1. Liste	Kennziffer	2. Liste	Kennziffer	3. Liste
0	$a\wedge b\wedge c$	10	$a\wedge b$	-	-
1	$a\wedge b\wedge c'$	20	$a\wedge c$		
2	$a\wedge b'\wedge c$	51	$b\wedge c'$		
5	$a'\wedge b\wedge c'$				

Anschließend überprüft man je zwei Minterme daraufhin, ob sie sich bloß durch das Negationszeichen einer einzigen Variablen unterscheiden. Ist das der Fall (was nur bei Mintermen benachbarter Felder der Fall sein kann), so lassen sie sich gemäß der Gesetze Dist., Kompl. und Neut. zu einem einzigen Term zusammenfassen. Z.B. kann man die mit 0 und 1 gekennzeichneten Terme zum Term $a\wedge b$ zusammenfassen; wir kennzeichnen diesen Term mit 10 und tragen in die 2. Liste ein. Die Terme 0 und 1 in der 1. Liste haken wir ab. In analoger Weise fahren wir fort, wobei ein bereits abgehakter Minterm der 1. Liste durchaus mehrmals mit einem passenden kombiniert werden darf. Zuletzt überträgt man jene Minterme, die nicht abgehakt werden konnten (was bei unserem Beispiel nicht der Fall ist) in die 2. Liste.

Die Terme der 2. Liste werden nun in der gleichen Weise weiterbearbeitet, womit eine 3. Liste entsteht. Aus dieser entsteht eine 4. Liste usw. Das Verfahren endet, wenn sich keine Terme mehr zusammenfassen lassen. In unserem Beispiel ist dies bereits in der 2. Liste der Fall. Man bezeichnet die verbleibenden Terme in Anlehnung an die Prim-Faktoren als Prim-Implikanten.

Zuletzt bleibt noch zu prüfen, ob die Primimplikanten voneinander unabhängig sind. Dies geschieht mit Hilfe der sogenannten Primimplikantentafel:

Kennziffer	0	1	2	5
$10=a\wedge b$	x	x		
$20=a\wedge c$	x		x	
$51=b\wedge c'$		x		x

Ein Kreuz steht immer dann, wenn der Primimplikant in dem durch die Kennzahl festgelegten Minterm enthalten ist. Ersichtlich genügen die Primimplikanten $a\wedge c$ und $b\wedge c'$, um alle Minterme "abzudecken". Man erhält daher als Minimalform den Term

$$f(a,b,c)=(a\wedge c)\vee(b\wedge c')$$

und somit den folgenden, sehr einfachen Schaltplan eines Multiplexers:

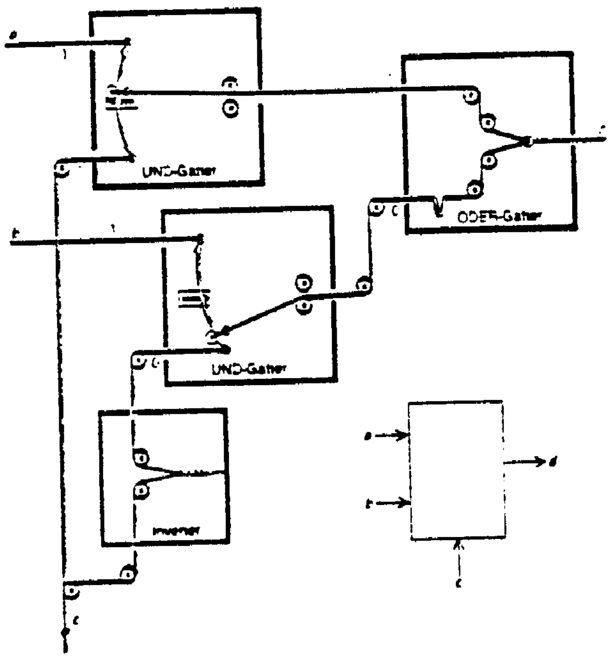


Fig. 8

Literatur:

(L1) Reichel·Müller·Laub: Lehrbuch der Mathematik 5
Verlag hpt, 1989

(L2) Müller: Logische Begriffe, Mengen, Schaltungen
in: Lehrplankommentar AHS·Oberstufe
Verlag ÖBV, 1990

(L3) Deller: Boolsche Algebra
Diesterweg Salle, 1976

(L4) Dewdney: Computer·Kurzweil
Spektrum der Wissenschaft, April 1989

(L5) Abraham·Seaton·Smith: Der optische Computer
Spektrum der Wissenschaft, April 1983